INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

Curso de Termodinâmica-GFI 04116

1º semestre de 2007

Prof. Jürgen Stilck

Solução do exercício 3-5

a) A diferença de temperatura entre dois reservatórios sucessivos é

$$\delta_T = \frac{T_f - T_i}{N}.$$

Vamos calcular a variação de entropia do sistema no processo que ocorre durante o seu contato térmico com o reservatório j:

$$\Delta S(N,j) = \int_{T_i+\delta_T(j-1)}^{T_i+\delta_T j} \frac{C_V}{T} dT = A \int_{T_i+\delta_T(j-1)}^{T_i+\delta_T j} dT = \delta_T A.$$

A quantidade de calor recebida pelo sistema nesse processo é:

$$Q(N,j) = \int_{T_i+\delta_T(j-1)}^{T_i+\delta_T j} C_V dT = A \int_{T_i+\delta_T(j-1)}^{T_i+\delta_T j} T dT = A\delta_T[T_i + \delta_T(j-1/2)].$$

Como o conjunto formado pelo sistema e pelo reservatório estão isolados, a quantidade de calor recebida pelo reservatório é $Q_R(N,j) = -Q(N,j)$, e lembrando que sua temperatura é constante, a variação de sua entropia é dada por:

$$\Delta S_R(N,j) = \frac{Q_R(N,j)}{T_i + \delta_T j} = \frac{A\delta_T^2}{2(T_i + \delta_T j)} - A\delta_T.$$

Podemos, então, calcular a variação de entropia do sistema composto:

$$\Delta S_t(N,j) = \Delta S(N,j) + \Delta S_R(N,j) = \frac{A\delta_T^2}{2(T_i + \delta_T j)},$$

ou seja,

$$\Delta S_t(N,j) = \frac{A(T_f - T_i)^2}{2N[NT_i + j(T_f - T_i)]}. \tag{1}$$

b) Vamos calcular a variação de entropia para o processo composto para alguns valores de N, usando o resultado obtido na equação (1). Para $N = 1$, temos:

$$\Delta S_t(1) = \Delta S_T(1,1) = \frac{A(T_f - T_i)^2}{2T_f}.$$

Para $N = 2$, obtemos:

$$\Delta S_t(2) = \Delta S_T(2,1) + S_T(2,2) = \frac{A(T_f - T_i)^2}{2T_f}\left[\frac{1}{2(1+\alpha)} + \frac{1}{4}\right],$$

onde $\alpha = T_i/T_f$. Finalmente, para $N = 3$ o resultado é:

$$\Delta S_t(3) = \Delta S_T(3,1) + S_T(3,2) + S_T(3,3) =$$

$$\frac{A(T_f - T_i)^2}{2T_f}\left[\frac{1}{3(1+2\alpha)} + \frac{1}{3(2+\alpha)} + \frac{1}{9}\right].$$

De fato, não é difícil escrever a expressão geral para um valor qualquer de N:

$$\begin{aligned}\Delta S_t(N) &= \frac{A(T_f - T_i)^2}{2T_f}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{N[j + (N-j)\alpha]} \\ &= \Delta S_t(1) f_N(\alpha),\end{aligned} \tag{2}$$

onde definimos a função $f_N(\alpha)$ como sendo a soma na expressão acima. Na figura 1, podemos observar que para qualquer valor de α a entropia do processo composto $\Delta S_t(N)$ com $N > 1$ é maior que $\Delta S_t(1)$.

c) A função $f_N(\alpha)$ definida na equação (2) não pode ser escrita em termos de funções elementares (existe uma função especial em termos da qual ela pode ser escrita, mas não vamos entrar nesse detalhe aquí). Podemos, porém, obter uma expressão aproximada para ela no limite em que $N \gg 1$, transformando a soma em integral. Vamos mostrar como isso é feito. Note que o incremento δj na soma é unitário, de maneira que podemos escrever:

$$f_N(\alpha) = \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{N[j + (N-j)\alpha]}\delta j.$$

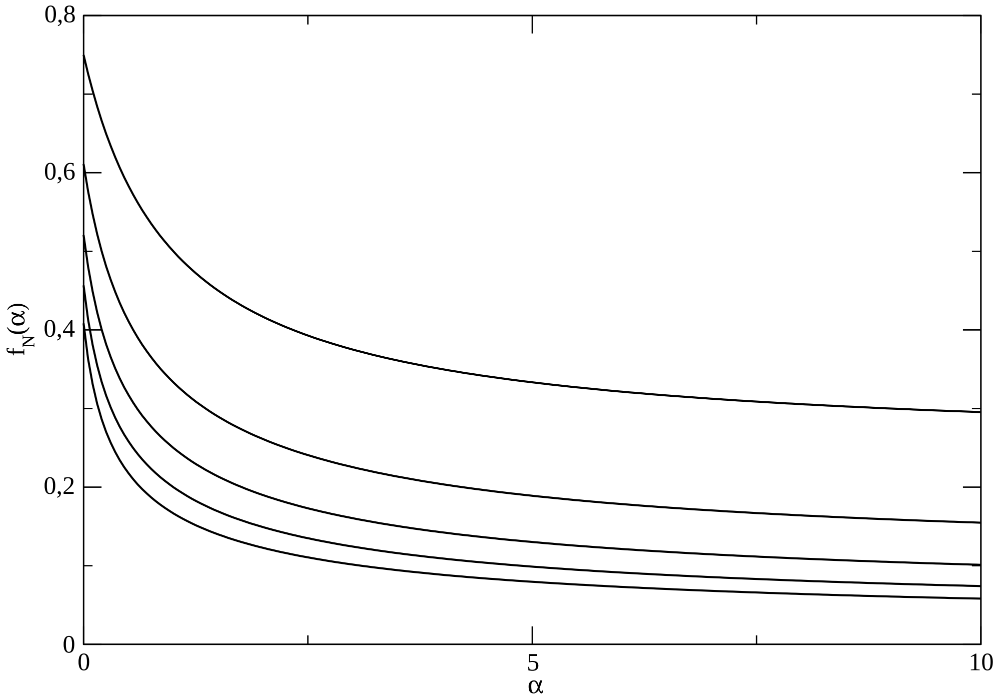

Figura 1: A função $f_N(\alpha)$. As curvas, de cima para baixo, correspondem a $N = 2, 3, \ldots, 6$.

Agora, definimos a variável $x = j/N$, e vemos que $\delta x = 1/N$. Aproximando a soma em j por uma integral na variável x, o que deve ser uma boa aproximação quando $N \gg 1$, obtemos:

$$f_N(\alpha) \approx \int_0^1 \frac{1}{N^2[x + (1-x)\alpha]} N\, dx$$

$$= \frac{1}{N}\frac{\ln(\alpha)}{\alpha - 1} = \frac{1}{N} f(\alpha)$$

Vemos, portanto, que para valores grandes de N a função $f_N(\alpha)$ se torna cada vez menor, sendo proporcional a $1/N$. Na figura 2, apresentamos curvas de $N f_N(\alpha)$ e a curva limite $f(\alpha)$. Note que de fato com N crescente $f(\alpha)$ se aproxima cada vez mais de $N f_N(\alpha)$.

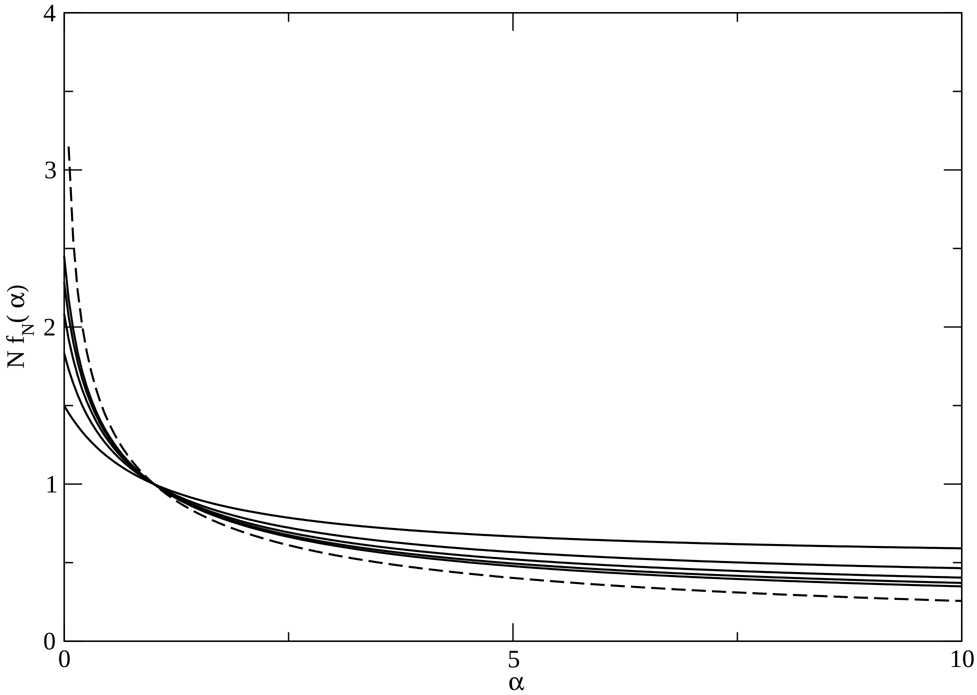

Figura 2: A função $Nf_N(\alpha)$ (linhas cheias). As curvas de cima para baixo (para $\alpha > 1$), correspondem a $N = 2, 3, \ldots, 6$. A linha tracejada é a função $f(\alpha)$, correspondendo ao limite de $Nf_N(\alpha)$ quando $N \to \infty$.